

Délisson Junio Gonçalves Silva

Otimização de risco em portfólios financeiros com algoritmos de programação linear

Belo Horizonte, Minas Gerais

2022

Délisson Junio Gonçalves Silva

Otimização de risco em portfólios financeiros com algoritmos de programação linear

Proposta de Pesquisa Tecnológica apresentada ao Curso de Bacharelado em Ciência da Computação do Departamento de Ciência da Computação da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito de diplomação do grau de Bacharel em Ciência da Computação

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação

Orientador: Cristiano Arbex Valle

Belo Horizonte, Minas Gerais
2022

Sumário

1	INTRODUÇÃO	3
1.1	Objetivos Gerais	3
1.2	Objetivos Específicos	4
2	REFERENCIAL TEÓRICO	5
3	METODOLOGIA	6
4	DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO	7
4.1	Arquitetura do Sistema	7
4.2	Hospedagem	9
4.3	Dados de retornos de ativos na bolsa brasileira	9
4.4	Interface de Usuário	9
4.4.1	Simulação paramétrica	9
4.4.2	Simulação com dados reais	10
4.4.3	Otimização de portfólios	11
5	CONCLUSÕES	14
	REFERÊNCIAS	15

1 Introdução

De acordo com a B3¹, 2 milhões de novos investidores entraram na bolsa entre 2019 e 2020, um crescimento de mais de 200% na base de investidores cadastrados². Desses novos investidores, 73% obtêm informações sobre investimentos na internet e 60% o fazem por meio de influenciadores digitais, e 30% de todos os investidores com patrimônio abaixo de R\$ 10.000 investem em mais de cinco ativos na bolsa³.

Em meio a tanta informação disponível aos investidores, se torna crucial a objetividade e o acesso a ferramentas modernas e testadas para gerência de seus portfólios. Apesar disso, esses pequenos investidores raramente têm acesso a ferramentas utilizadas por grandes empresas ou casas de investimento, o que limita muito sua capacidade de tomar decisões de forma independente. Nessa área, as provisões de gerenciamento de risco costumam ser subrepresentadas online, o que faz com que investidores acabem portando mais risco do que o esperado em seus portfólios.

[Markowitz 1952] introduz um método pelo qual é possível maximizar os retornos esperados de um portfólio financeiro dado uma restrição de risco. É possível abordar esse problema, como demonstrado por [Krokhmal, Palmquist e Uryasev 2003] como um problema de otimização convexa, o que facilita a sua computação e traz consigo um conjunto de técnicas já existentes para sua solução [Boyd, Vandenberghe e Faybusovich 2006]. Apesar de muito funcionais, todas essas técnicas são também de difícil acesso ao investidor individual.

1.1 Objetivos Gerais

Em trabalhos anteriores, foi criada uma plataforma acessível publicamente onde usuários têm acesso ao cálculo da perda média esperada (ou CVaR, Conditional Value At Risk) de um portfólio baseado em ativos listados na bolsa de valores brasileira, assim como outras métricas relevantes. A proposta deste trabalho é utilizar algoritmos de programação linear para disponibilizar ferramentas que consigam otimizar, dados os parâmetros apropriados, um portfólio financeiro com pesos e unidades para o usuário final.

¹ B3: <https://b3.com.br/>

² B3 divulga estudo sobre os 2 milhões de investidores que entraram na bolsa entre 2019 e 2020: http://www.b3.com.br/pt_br/noticias/investidores.htm. Acesso em 29/06/2021

³ A descoberta da bolsa pelo investidor brasileiro: <http://b3.com.br/lumis/portal/file/fileDownload.jsp?fileId=8AE490CA76400395017662491534717C>. Acesso em 29/06/2021

1.2 Objetivos Específicos

Dado um universo de possíveis ativos financeiros (listados na Bolsa Brasileira B3), deverá ser possível informar ao sistema uma coleção de ativos (ou apenas permitir que o sistema se utilize de todo o universo), um objetivo a ser alcançado e um valor a investir. A partir disso, o sistema fará o cálculo do melhor portfólio possível levando em conta os parâmetros recebidos e a performance histórica de cada ativo incluso, e irá sugerir uma alocação ótima levando em conta o objetivo a ser alcançado, limites mínimos / máximos de risco ou retorno e o valor investido.

2 Referencial Teórico

A gestão de risco é uma área de estudo e desenvolvimento que visa reduzir, controlar e conhecer os riscos associados a um certo processo ou decisão. No contexto dos mercados financeiros, isso pode ser estudado através de medidas que aproximam o downside risk (risco de perdas inesperadas), como o VaR e o CVaR.

O VaR (Value At Risk) é uma medida da perda máxima de um investimento em um determinado período de tempo para um dado nível de confiança. Ou seja, dado um portfólio de ativos, a medida VaR a um dado nível de confiança indica qual a perda máxima que se espera, dado tal nível de confiança, em um período de tempo. Ele pode ser usado para responder, por exemplo, à pergunta "Qual a perda máxima com 95% de certeza que meu portfólio pode acarretar nos próximos 3 meses?". Apesar de ser uma boa aproximação, essa medida tem algumas propriedades indesejadas que fazem com que seja um instrumento muito básico para tomada de decisões de otimização de portfólio, como a não-coerência e falta de subaditividade. Além disso, estudos têm demonstrado sua ineficiência na estimação de risco, particularmente em momentos de crise [Mutu, Balogh e Moldovan 2011]

Já o CVaR (Conditional Value At Risk) indica qual o retorno esperado dos $\alpha\%$ piores casos de um portfólio. Proposto por [Rockafellar e Uryasev 2000], o CVaR é uma medida de risco coerente e facilmente otimizado, pois é uma medida convexa. Dessa forma, é possível calcular, através de programação inteira, um portfólio ótimo para a redução de risco.

Considerando as ferramentas acima, a proposta deste trabalho se resume em desenvolver um sistema Web para o cálculo da otimização de alocação de ativos em um portfólio considerando a bolsa de valores brasileira. Existem vários estudos que realizam o cálculo das métricas e/ou da otimização do portfólio, como o trabalho desenvolvido por [Videira e Maciel 2019] ou [Barrozo e Lima 2019]. Todavia, todos esses trabalhos são análises estáticas e não interativas, o que leva a uma dificuldade de aproximação dentre os trabalhos e o usuário final (investidor individual).

De acordo com [Markowitz 1952], é possível encontrar, através da diversificação de ativos, uma fronteira eficiente onde o investidor consegue montar um portfólio que oferece o máximo retorno esperado para um nível de risco, ou o mínimo possível de risco para um retorno esperado. Existem diversos trabalhos voltados a otimização de portfólios financeiros utilizando esses indicadores, como [Alexander, Coleman e Li 2006] e [Chow e Ghavamzadeh 2014]. Esses trabalhos resultam em uma análise estática em conjunto com uma metodologia e seus resultados, sem oferecer uma forma interativa e acessível para a reprodução dos experimentos. O presente trabalho se diferencia ao oferecer uma ferramenta com resultados imediatos e análise cujos parâmetros podem ser variados em tempo real, se encaixando em situações diversas de otimização.

3 Metodologia

Para atingir os objetivos, foram implementadas as seguintes tarefas:

1. Rever o dataset a ser utilizado.

Escolher e configurar um dataset viável que forneça cotações e/ou retornos históricos de ativos da bolsa de valores brasileira. Um conjunto de dados já havia sido escolhido em trabalhos anteriores, então esse passo visava confirmar se ele ainda seria suficiente para a etapa de otimização.

2. Definir os problemas de otimização linear.

Essa etapa constou de revisão de literatura e definição de quais problemas seriam modelados e quais seriam os objetivos e restrições a serem implementados.

3. Implementar a otimização linear em software.

Nessa etapa os problemas de otimização linear foram implementados em software e testados com dados reais do dataset acima.

4. Definir a interface de usuário para o pacote de otimização.

Aqui foram definidos quais os campos e configurações que estariam presentes na interface de usuário final.

5. Calcular a alocação ótima de investimentos nos ativos em um portfólio escolhido.

Na etapa final, o software de otimização linear foi integrado à interface desenvolvida e a experiência foi implementada e testada fim-a-fim.

4 Desenvolvimento do trabalho

Este trabalho resultou em um sistema Web acessível publicamente pela Internet, onde investidores serão capazes de utilizar medidas de risco para simular otimizações de portfólios baseado em dados históricos reais obtidos da bolsa brasileira de valores. Os usuários são capazes de definir o objetivo a ser otimizado dentre a seguinte lista:

1. Minimizar o risco

É calculado uma alocação de portfólio que minimiza ao máximo possível o risco ao qual o investidor estará exposto.

2. Maximizar retorno para risco

O usuário seleciona um valor de risco máximo suportável e o sistema calcula uma alocação de portfólio que maximiza o retorno, enquanto mantém o nível de risco abaixo do valor selecionado.

3. Minimizar risco para retorno

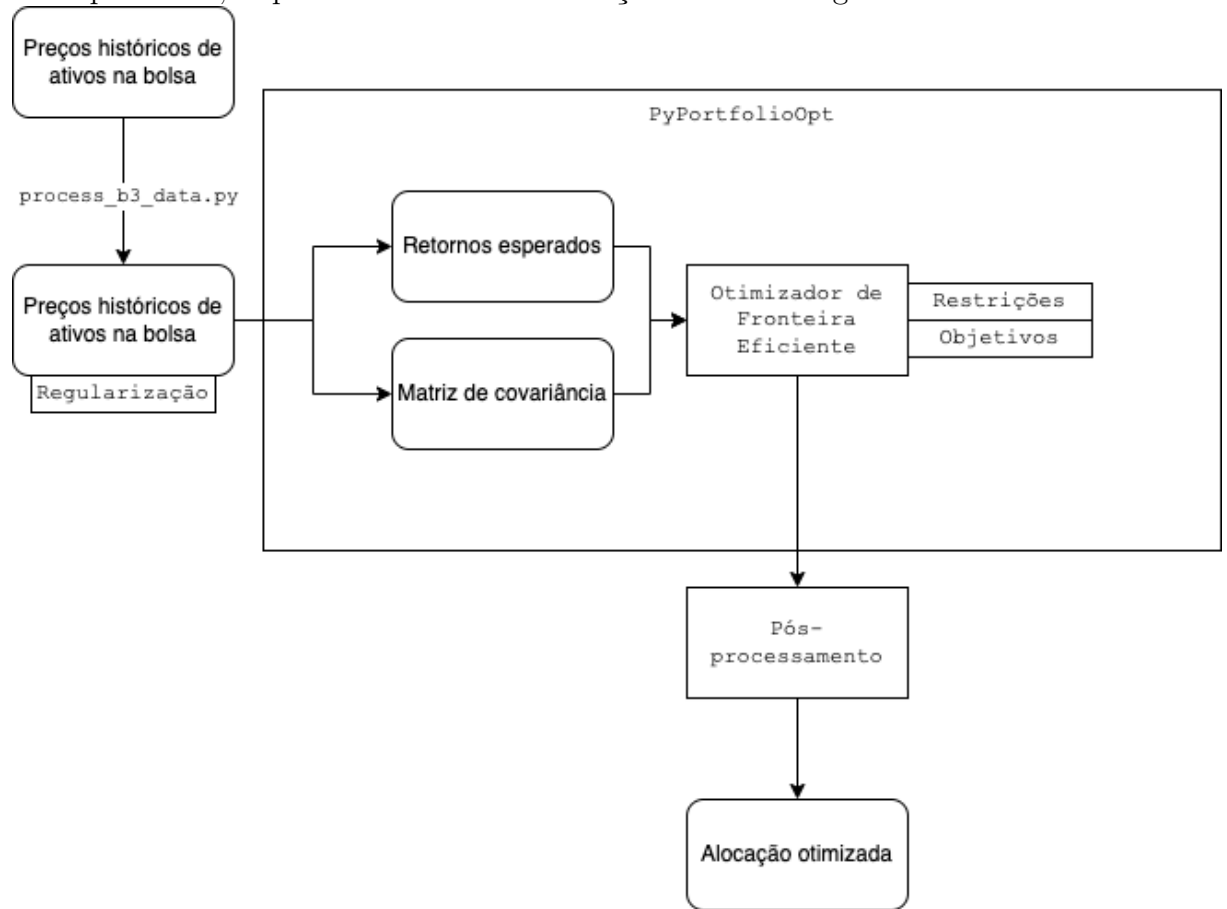
O usuário seleciona um valor de retorno mínimo desejável e o sistema calcula uma alocação de portfólio que minimiza o risco exposto enquanto mantém o retorno acima do valor selecionado.

4.1 Arquitetura do Sistema

O sistema foi desenvolvido para ser acessível apenas com um navegador da Web padrão, sem outras aplicações especiais necessárias para sua utilização. A arquitetura do sistema atualmente foca em manter a maior parte do código executável e funcionalidades necessárias embutidas diretamente no navegador, o que simplifica muito sua distribuição. Entretanto, a execução de otimização de portfólios com programação linear se mostrou muito taxante em navegadores Web em todos os sistemas testados, então sua implementação é feita em um servidor à parte que apenas recebe pedidos de otimização, faz os cálculos necessários e os retorna para a página da Web.

A otimização de portfólios foi implementada com o uso de um pacote disponível sob a licença MIT chamado PyPortfolioOpt [Martin 2021]. O mesmo disponibiliza várias funções que encapsulam as operações necessárias para transformar um problema do domínio de negócios para problemas de otimização linear, calculando problemas de otimização linear em cima da fronteira eficiente definida pelo universo de ativos configurado pelo sistema. Também é utilizado o pacote CVXPY [Diamond e Boyd 2016], que abstrai as diferentes integrações com *solvers* de otimização para programação linear. Como pré-processamento,

é incluído um termo na função objetivo que aplica uma operação de regularização L2 nos pesos de portfólios, o que leva a uma diversificação de ativos sugeridos.



Finalmente, os valores obtidos da programação linear contém pesos fracionários, porém geralmente não é possível (se não imprático) comprar um valor não-inteiro de ativos, portanto uma etapa de pós-processamento é incluída onde os pesos de cada ativo são ajustados através de um outro programa linear que objetiva reduzir o "desperdiço" de valor, alocando uma quantidade inteira de unidades para cada ativo incluso no portfólio otimizado, em uma distribuição que tenta aproximar a original.

Já a interface foi construída por meio de código HTML (Hypertext Markup Language), a linguagem padrão para criação de páginas Web. Em conjunto com o mesmo, são utilizadas folhas de estilo CSS (Cascading Style Sheets) que possibilitam a estilização do site e melhora de sua acessibilidade. Boa parte dessa estilização foi reaproveitado um pacote open-source chamado Bootstrap¹ que fornece uma enorme quantidade de estilos prontos, testados e padrões para a implementação de controles de usuário.

Como camada de negócio, o HTML é gerado e controlado através de código JavaScript utilizando o *framework* VueJS². Dessa forma, todos os algoritmos implementados e os controles da interface de usuário são implementados em arquivos *.vue* e *.js*.

¹ <https://getbootstrap.com/>

² <https://vuejs.org/>

4.2 Hospedagem

O código-fonte desenvolvido está disponível publicamente no GitHub³, uma ferramenta de hospedagem de código gratuita que possibilita a colaboração de diversas pessoas no mesmo projeto. Mesmo não tendo mais de um colaborador, o GitHub facilita a distribuição de código fonte e a revisão do mesmo, quando necessário. O repositório pode ser acessado pelo endereço <https://github.com/delissonjunio/Ufmg-Poc>.

O site em si foi hospedado utilizando um serviço gratuito chamado Netlify⁴, que permite servir sites estáticos para qualquer usuário do mundo gratuitamente, dentro dos seus limites (que são mais que suficientes para o trabalho desenvolvido). A página está disponível publicamente neste endereço Web: <https://delissonjunio.github.io/Ufmg-Poc/>

4.3 Dados de retornos de ativos na bolsa brasileira

Um conjunto de dados[Salvatore 2021] contendo várias informações de todos os ativos listados na bolsa brasileira foi obtido do Kaggle⁵, um site onde usuários podem fazer o envio de conjuntos de dados e hospedá-los gratuitamente na internet. Esse dataset foi originalmente obtido do site da B3 e compilado em um único arquivo CSV, `b3_stocks_1994_2020.csv`. Como esse arquivo continha informações não necessárias para a simulação atual (preço de abertura e fechamento, alta e baixa, volume de negociação) e não possuía diretamente dados necessários (retorno diário), o mesmo foi pré-processado através de um script em Python, `process_b3_file.py`, que gera um terceiro arquivo `b3_stocks_1994_2020.json`. Esse terceiro arquivo já contém o retorno diário e descarta outras informações desnecessárias à simulação executada, possibilitando o seu carregamento direto no navegador Web sem muita perda de performance.

4.4 Interface de Usuário

A interface de usuário consiste em uma página única, com 5 seções principais: o cabeçalho, a simulação paramétrica, simulação com dados reais, otimização de portfólios e o rodapé. No cabeçalho, foram inseridas algumas informações como o nome do autor, a referência do trabalho sendo apresentado e uma leve introdução ao propósito da ferramenta.

4.4.1 Simulação paramétrica

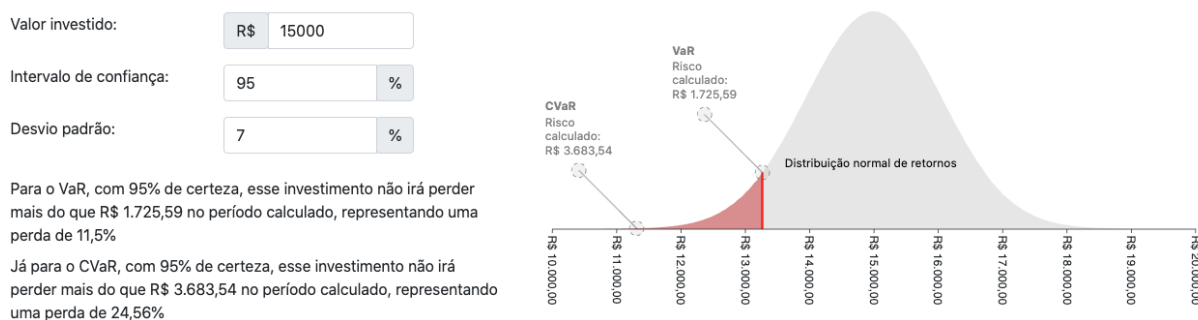
A simulação paramétrica consiste em calcular os indicadores para um ativo simulado cujos retornos seguem uma distribuição normal cujo desvio padrão é configurável pelo

³ <https://github.com>

⁴ <https://netlify.com>

⁵ <https://kaggle.com/>

usuário. A interface de simulação paramétrica é apresentada da seguinte forma:



No lado esquerdo superior, são apresentados os três controles principais desse cálculo: O valor investido no ativo, o intervalo de confiança desejado e o desvio padrão do retorno ao investimento do ativo simulado. A partir das entradas do usuário, o texto no canto esquerdo inferior e o gráfico no lado direito são atualizados em tempo real para representar os indicadores calculados e dar ao investidor um entendimento intuitivo de como os indicadores são afetados pela volatilidade (representada pelo desvio padrão) e o intervalo de confiança desejado no cálculo dos mesmos.

4.4.2 Simulação com dados reais

Na simulação real, o usuário também entra com o valor investido total e o intervalo de confiança desejado, que mantém os mesmos significados que na simulação paramétrica, porém também faz a entrada do período de simulação e do portfólio a ser analisado. Como período de simulação, o usuário pode escolher um número inteiro de anos passados a serem incluídos na simulação, iniciando em 2020. Dessa forma, selecionando o valor "1" o usuário sinaliza incluir apenas o ano de 2020. Com o valor "2", o usuário inclui os anos de 2020 e 2019, e assim em diante.

Valor investido: R\$ 15000

Selecione um ativo:

Intervalo de confiança: 95 %

WEGE3 20 %

MGLU3 50 %

BBDC4 30 %

Período de simulação: 2 último(s) ano(s)

Para o VaR, com 95% de certeza, esse investimento não irá perder mais do que R\$ 423,45 em um dia, representando uma perda de 2,82%

Já para o CVaR, com 95% de certeza, esse investimento não irá perder mais do que R\$ 593,05 em um dia, representando uma perda de 3,95%

Já no canto direito, o usuário monta o portfólio a ser utilizado. Um portfólio é definido por uma lista de ativos e um peso para cada ativo, de forma que a soma de todos os pesos seja exatamente 100%. Ao clicar na caixa de texto, uma lista com todos os ativos disponíveis na bolsa brasileira para simulação são listados, e o usuário pode continuar digitando para filtrar um ativo e eventualmente clicar no botão adjacente para incluir esse ativo em seu portfólio a ser analisado. A cada ativo adicionado ao portfólio, é feito um ajuste automático nos pesos de outros ativos no portfólio para manter a soma em 100%, porém o usuário é livre para fazer alterações no peso de cada ativo assim que termina a

etapa de adição.

No canto inferior, é apresentada uma mensagem informando o investidor qual o nível de risco daquele portfólio, levando em conta o peso de cada ativo no mesmo e os retornos obtidos com aquele portfólio utilizando dados históricos conforme descrito na seção *Dados de retornos de ativos na bolsa brasileira*.

4.4.3 Otimização de portfólios

Na seção de otimização, usuário pode configurar alguns parâmetros diferentes:

1. O valor que deve ser considerado como investido, em reais
2. Qual o valor β que deve ser considerado para o cálculo do CVaR, em pontos percentuais, indica qual o intervalo de confiança a ser desejado
3. O método de otimização a ser selecionado, conforme listado anteriormente. Caso o método envolva um outro parâmetro (risco máximo ou retorno mínimo), o mesmo também pode ser escolhido
4. Uma lista de ativos a serem considerados. Isso possibilita ao usuário focar em apenas uma fatia de ativos dado o universo disponível no conjunto de dados, e por exemplo comparar qual uma alocação ideal em um portfólio constituído por ativos que ele já possui com a sua alocação atual. Caso nada seja selecionado, o sistema considera todos os ativos constantes no conjunto de dados.

Na seção abaixo, utilizamos algoritmos de programação linear para otimizar o problema do CVaR de forma a atingir um objetivo desejado.

Valor investido: Seleccione um ativo:

Intervalo de confiança: % (todos os ativos da B3)

Selecione um método:

Nome do ativo	Quantidade	Valor unitário	Total a investir
			Total a investir

Ao configurar as opções desejadas, o sistema irá realizar os cálculos descritos acima e indicar os resultados por meio de uma tabela onde cada linha identifica um ativo e qual a quantidade a ser investida no mesmo. Caso a quantidade seja negativa, o sistema indica que aquela posição deve ser uma venda a descoberto. Ao final é indicado qual o valor total a investir; esse valor será geralmente ligeiramente menor do que o valor a ser investido selecionado pelo usuário justamente pelo fato que é necessário obter valores inteiros para os ativos, o que geralmente gera um valor "desperdiçado" ao final.

Na seção abaixo, utilizamos algoritmos de programação linear para otimizar o problema do CVaR de forma a atingir um objetivo desejado.

Valor investido: R\$ 10000 Seleccione um ativo:

Intervalo de confiança: 99.99 % (todos os ativos da B3)

Selecione um método: Minimizar o risco

Para o CVaR, com 99,99% de certeza, esse investimento não irá perder mais do que R\$ 730,38 em um dia, representando uma perda de 7,31%. O retorno anual esperado para esse portfólio é de 13,28%, ou R\$ 1.327,81.

Nome do ativo	Quantidade	Valor unitário	Total a investir
AGRO3	20	R\$ 25,00	R\$ 500,00
CARD3	16	R\$ 15,09	R\$ 241,44
CESP6	2	R\$ 28,97	R\$ 57,94
EQTL3	1	R\$ 23,16	R\$ 23,16
FESA4	68	R\$ 19,11	R\$ 1.299,48
GRND3	96	R\$ 8,38	R\$ 804,48
ITUB3	3	R\$ 27,93	R\$ 83,79
ITUB4	9	R\$ 31,63	R\$ 284,67
KEPL3	32	R\$ 38,00	R\$ 1.216,00
ODPV3	65	R\$ 14,55	R\$ 945,75
PMAM3	4	R\$ 10,00	R\$ 40,00
PSSA3	26	R\$ 49,00	R\$ 1.274,00
SLCE3	79	R\$ 27,45	R\$ 2.168,55
TRPL4	38	R\$ 27,81	R\$ 1.056,78
			R\$ 9.996,04

Caso o usuário selecione um conjunto de ativos, todo o processo descrito acima irá considerar aquele conjunto como o universo a ser otimizado:

Na seção abaixo, utilizamos algoritmos de programação linear para otimizar o problema do CVaR de forma a atingir um objetivo desejado.

Valor investido: R\$ 10000 Seleccione um ativo:

Intervalo de confiança: 99.99 %

Selecione um método: Minimizar o risco

Para o CVaR, com 99,99% de certeza, esse investimento não irá perder mais do que R\$ 1.357,37 em um dia, representando uma perda de 13,58%. O retorno anual esperado para esse portfólio é de 3,11%, ou R\$ 311,42.

Nome do ativo	Quantidade	Valor unitário	Total a investir
ITSA4	429	R\$ 11,73	R\$ 5.032,17
KLBN4	327	R\$ 5,21	R\$ 1.703,67
PETR4	51	R\$ 28,34	R\$ 1.445,34
WEGE3	24	R\$ 75,74	R\$ 1.817,76
			R\$ 9.998,94

Na seção abaixo, utilizamos algoritmos de programação linear para otimizar o problema do CVaR de forma a atingir um objetivo desejado.

Valor investido: Seleção um ativo:

Intervalo de confiança: %

Selecione um método:

Retorno desejado: %

Para o CVaR, com 99,99% de certeza, esse investimento não irá perder mais do que R\$ 1.552,57 em um dia, representando uma perda de 15,53%. O retorno anual esperado para esse portfólio é de 6,99%, ou R\$ 698,71.

Nome do ativo	Quantidade	Valor unitário	Total a investir
EMBR3	22	R\$ 8,85	R\$ 194,70
ITSA4	293	R\$ 11,73	R\$ 3.436,89
KLBN4	62	R\$ 5,21	R\$ 323,02
PETR4	85	R\$ 28,34	R\$ 2.408,90
WEGE3	48	R\$ 75,74	R\$ 3.635,52
			R\$ 9.999,03

Em algumas situações, é possível que o portfólio configurado pelo usuário não seja possível. Por exemplo, no conjunto de dados com as restrições e objetivos utilizados, não é possível encontrar um portfólio com risco abaixo de 1%. Nesse caso, o usuário recebe uma mensagem de aviso:

Na seção abaixo, utilizamos algoritmos de programação linear para otimizar o problema do CVaR de forma a atingir um objetivo desejado.

Valor investido: Seleção um ativo:

Intervalo de confiança: % (todos os ativos da B3)

Selecione um método:

Risco máximo desejado: %

Não foi possível otimizar um portfólio. Tente aumentar o risco/diminuir o retorno esperado.

5 Conclusões

A proposta deste trabalho é oferecer uma ferramenta útil para investidores, que a todo momento precisam levar uma enorme quantidade de dados em conta para decisões de alocação de capital. É comum analisar o risco de um dado ativo, porém por vezes isso toma um papel secundário frente a análises de rentabilidade do mesmo. Dessa forma, investidores podem ficar expostos a mais risco do que desejam sem realmente saber do fato. A otimização de portfólios é apenas uma ferramenta que deve ser levada em consideração pelo investidor, mas a sua disponibilidade e fácil acesso pode trazer informações de extrema importância a investidores que não tenham tido exposição formal a todo o referencial teórico de uma forma prática e interativa.

Partindo dos indicadores de risco VaR e CVaR[Rockafellar e Uryasev 2000] foi possível criar uma ferramenta que permite com que usuários explorem interativamente essa análise de risco e pratiquem um pouco de gerenciamento de risco em seus portfólios. O resultado foi uma plataforma disponível publicamente, acessível através de qualquer navegador web e de código aberto, o que facilita melhorias futuras e colaboração de terceiros. Finalmente, foi possível disponibilizar uma ferramenta que possibilita a otimização de alocação em portfólios, baseada fundamentalmente em programação linear, que é capaz de indicar portfólios ótimos dado as restrições e parâmetros entregues.

Há ainda muito a ser feito. Conforme explicado no trabalho, os resultados da otimização de portfólios é apenas uma previsão específica e resta ao investidor explorar as diferentes opções de alocação de portfólio para poder encontrar uma combinação de ativos cujo perfil de risco seja aceitável. Seria interessante fazer questionários com investidores de diversos níveis de experiência e *backgrounds* profissionais e de formação para melhor entender qual o impacto que essa ferramenta pode ter. Além disso, a adição de recursos para atualização de datasets periódica permitiria que a ferramenta se mantivesse conforme o passar do tempo, principalmente no que tange ao cálculo de portfólio ótimo - assim como a inclusão de universos de ativos diferentes do atual, que é composto apenas por ativos listados na bolsa de valores B3 - poderia ser muito útil incluir também ativos listados em outras bolsas assim como *commodities*, criptomoedas e outros.

Seria também interessante ter um conteúdo educacional na página para que os usuários não apenas usem a ferramenta mas também entendam a forma como ela funciona e, principalmente, as limitações por trás da mesma. Por final, a plataforma também pode ser melhorada com a utilização mais ampla de recursos visuais, que em geral podem ser mais intuitivos do que explicações textuais.

Referências

- [Alexander, Coleman e Li 2006]ALEXANDER, S.; COLEMAN, T.; LI, Y. Minimizing cvar and var for a portfolio of derivatives. *Journal of Banking Finance*, v. 30, n. 2, p. 583–605, 2006. ISSN 0378-4266. Risk Management and Optimization in Finance. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426605000841>>.
- [Barrozo e Lima 2019]BARROZO, G. A.; LIMA, V. P. Otimização de portfólio utilizando cvar como medida de risco. *UFRJ/Escola Politécnica*, 11 2019.
- [Boyd, Vandenberghe e Faybusovich 2006]BOYD; VANDENBERGHE; FAYBUSOVICH, L. Convex optimization. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, v. 51, p. 1859–1859, 12 2006.
- [Chow e Ghavamzadeh 2014]CHOW, Y.; GHAVAMZADEH, M. Algorithms for cvar optimization in mdps. *CoRR*, abs/1406.3339, 2014. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1406.3339>>.
- [Diamond e Boyd 2016]DIAMOND, S.; BOYD, S. CVXPY: A Python-embedded modeling language for convex optimization. *Journal of Machine Learning Research*, v. 17, n. 83, p. 1–5, 2016.
- [Krokhmal, Palmquist e Uryasev 2003]KROKHMAL, P.; PALMQUIST, J.; URYASEV, S. Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints. *Journal of Risk*, v. 4, 05 2003.
- [Lappalainen 2008]LAPPALAINEN, M. *Portfolio Optimization with CVaR*. Tese (Doutorado), 2008. Disponível em: <<http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:umu:diva-51339>>.
- [Markowitz 1952]MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, v. 7, p. 77, 03 1952.
- [Martin 2021]MARTIN, R. A. Pyportfolioopt: portfolio optimization in python. *Journal of Open Source Software, The Open Journal*, v. 6, n. 61, p. 3066, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.21105/joss.03066>>.
- [Mutu, Balogh e Moldovan 2011]MUTU, S.; BALOGH, P.; MOLDOVAN, D. The efficiency of value at risk models on central and eastern european stock markets. *International Journal of Mathematics and Computers in Simulation*, v. 5, p. 110–117, 01 2011.
- [Ogryczak e Śliwiński 2011]OGRYCZAK, W.; ŚLIWIŃSKI, T. On solving the dual for portfolio selection by optimizing conditional value at risk. *Computational Optimization and Applications*, v. 50, p. 591–595, 12 2011.

- [Rockafellar e Uryasev 2000]ROCKAFELLAR, R.; URYASEV, S. Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk*, v. 2, p. 21–42, 01 2000.
- [Roy 1952]ROY, A. Safety first and the holding of assets. *Econometrica*, v. 20, n. 3, p. 431 – 449, 1952.
- [Salvatore 2021]SALVATORE, F. Stocks from the brazilian stock exchange. 2021. Acessado em 22/08/2021. Licenciado sob GPL-2. Disponível em: <<https://www.kaggle.com/felsal/ibovespa-stocks/version/26>>.
- [Videira e L. 2019]VIDEIRA, F.; L., M. Avaliação do desempenho de carteiras de ações ajustadas ao CVAR no Brasil. In: UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. *SemeAd*. [S.l.], 2019.